Blatt 12

Abgabe per Email am 15. Mai 2020 um 13 Uhr

Aufgabe 58. Stochastische Matrizen (A, 4 Punkte)

(a) Seien $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ zwei stochastische Matrizen. Zeige, dass $\mathbf{P}\mathbf{P}'$ auch eine stochastische Matrix ist.

(b) Sei X die Markovkette mit Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ und Startverteilung ν. Zeige, dass $(X_{kn})_{n\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}$, eine Markovkette mit Übergangsmatrix $\mathbf{P}^k$ ist.

Aufgabe 59. σ-Algebra $\mathcal{F}_T$ (A, 3 Punkte)
Sei T eine Stoppzeit und $\mathcal{F}_T$ die Menge aller prä-T-Ereignisse, definiert im Skript auf Seite 98. Zeige, dass $\mathcal{F}_T$ eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 60. Maximum der einfachen Irrfahrt (B, 4 Punkte)
Sei (S_n) eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ und $M_n = \max(S_0, \dots, S_n)$

(a) Zeige, dass die Folge $M = (M_n)_{n\geq 0}$ keine Markovkette bezüglich ihrer natürlichen Filtration $\mathcal{F}_n^M = \sigma(M_0, \dots, M_n)$ ist.

(b) Zeige, dass M eine Markovkette bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_n^S = \sigma(S_0, \dots, S_n)$ ist.

(c) Zeige dass die Folge $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ eine $\mathbb{Z}^2$-wertige Markovkette bezüglich der Filtration $\mathcal{F}^S$ ist. Finde ihre Übergangswahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 61. Urnenkette (A–B, 6 Punkte)
Zwei Urnen A und B enthalten zusammen N Bälle. In einem Schritt eines Experiments wird eine Urne gewählt, daraus ein Ball gezogen, nochmals eine Urne gewählt und der gezogene Ball in diese Urne zurückgelegt. Sei Y_n die Anzahl Bälle in Urne A nach n Schritten. Bestimme die Übergangsmatrix von Y_n, in folgenden Fällen:

(a) Die erste Urne wird mit Wahrscheinlichkeit $P(A)$ =“Anzahl Bälle in A”$/N$, die zweite mit Wahrscheinlichkeit $P(A) = p \in (0, 1)$ gewählt.

(b) Die erste Urne wird mit Wahrscheinlichkeit $P(A) = p$, die zweite mit Wahrscheinlichkeit $P[A]$ =“Anzahl Bälle in A”$/N$ gewählt.

(c) Beide Urnen werden mit Wahrscheinlichkeit $P(A)$ =“Anzahl Bälle in A”$/N$ gewählt.

Aufgabe 62. Besuche von einer Menge (B, 5 Punkte)
Sei X_n eine Markovkette auf S und sei $A \subset S$, $A \neq \emptyset$. Nimm an, dass $H_x < \infty$, P_y-f.s., für alle $x, y \in S$ ist, d.h. jeder Zustand wird von jedem erreicht. Wir definieren die Folge $(H_n)_{n\geq 0}$ von Eintrittzeiten in A,

$$\begin{aligned} H_A^1 &= H_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}, \\ H_A^{n+1} &= \inf\{m > H_n : X_m \in A\}. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Zeige, dass H_A^n für jedes n eine Stoppzeit ist.

(b) Zeige mit Hilfe der starken Markoveigenschaft, dass die Folge $Y_n = X_{H_n}$ eine Markovkette ist. Bestimme ihre Übergangswahrscheinlichkeiten.