Blatt 11

Abgabe per Email am 8. Mai 2020 um 13 Uhr

Aufgabe 53. (A, 2 Punkte)
Sei $M = (M_n)_{n\geq 0}$ ein previsibles Martingal. Zeige, dass M dann P-f.s. konstant ist, d.h. $M_n = M_0$ für alle n, P-f.s.

Aufgabe 54. L^2-Martingale (A, 4 Punkte)
Sei $X = (X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal mit $X_n \in L^2$.

(a) Zeige, dass die Inkremente $\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$ paarweise unkorreliert sind.

(b) Formuliere mit Hilfe der obigen Bemerkung ein schwaches Gesetz der grossen Zahlen für Martingale.

Aufgabe 55. Anwendung von Optional Stopping Theorem (B, 8 Punkte)
Sei $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ die einfache symmetrische Irrfahrt, d.h. X_i sind i.i.d., $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$, und sei $H_x = \inf\{k \geq 0 : S_k = x\}$. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Für $a \in \mathbb{N}$ und $T = H_a \wedge H_{-a} = \inf\{k \geq 1 : \ S_k \notin (-a, a)\}$ gilt $E(T) = a^2$. *Hinweis:* Nutze, dass $S_n^2 - n$ ein Martingal ist.

(b) (Bonusfrage, 3 Punkte) Finde Konstanten b und c, sodass $Y_n = S_n^4 - 6nS_n^2 + bn^2 + cn$ ein Martingal ist. Versuche damit $E(T^2)$ berechnen.

Betrachte jetzt die asymmetrische Irrfahrt mit $\frac{1}{2} < P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = -1)$.

(c) Zeige, dass S_n ein Submartingal ist. Kannst du es modifizieren, so dass es ein Martingal wird.

(d) Benutze dieses Martingal um zu zeigen, dass $E(H_b) = \frac{b}{2p-1}$ für jedes $b \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 56. Bankrott einer Versicherungsgesellschaft (B, 5 Punkte)
Eine Versicherungsgesellschaft bekommt jedes Jahr fixe Prämien in der Höhe von $c > 0$, und im Jahr n zahlt sie Entschädigungen in der Höhe von ζ_n, wobei ζ_n i.i.d. normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartugswert μ, $\mu < c$, und Varianz σ^2 sind. Der Wert S_n beziffert das Gesamtvermögen der Versicherungsgesellschaft am Ende des Jahres n, d.h. $S_n = S_{n-1} + c - \zeta_n$ mit einer gegebenen Konstante $S_0 > 0$. Die Versicherungsgesellschaft ist Zahlungsunfähig, falls das Gesamtvermögen Null oder weniger beträgt.

(a) Zeige, dass $M_n^\lambda = \exp\left\{\lambda S_n - n\big(\lambda(c-\mu) + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2\big)\right\}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Martingal ist. (siehe auch Aufgabe 44)

(b) Mit Hilfe von (a) zeige, dass

$$P(\text{Bankrott}) := P(\exists n : S_n \leq 0) \leq \exp\{-2(c-\mu)S_0/\sigma^2\}.$$

Hinweis. Benutze, dass $E(\mathrm{e}^{\lambda\zeta_n}) = e^{\mu\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2}$.

Aufgabe 57. Dominierte Konvergenz (B–C, 5 Punkte)
Zeige die folgende Version des Satzes von Lebesgue (cf. Satz 3.7), die wir im Beweis von Satz 19.5 benutzt haben: Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Zufallsvariablen die *in Wahrscheinlichkeit* gegen X konvergiert. Falls $|X_n| \leq Y \in L^1$ für alle $n \geq 0$, dann konvergiert X_n auch in L^1 gegen X.

Hinweis. Zeige zuerst, mit Hilfe des Lemmas von Borel-Cantelli, dass wenn $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, dann existiert eine Teilfolge $k_n \uparrow \infty$, so dass $X_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X$. Nutze, dann das Argument von Seite 48 des Skripts.