Blatt 10

Abgabe per Email am 1. Mai 2020 um 13 Uhr

Aufgabe 47. Gegenbeispiel zur Vorlesung (A, 2 Punkte)
(siehe Korollar 16.4 und Übung 16.5) Finde ein Supermartingal X_n (das kein Martingal ist), so dass $Y_n = X_n^2$ ein Submartingal ist.

Aufgabe 48. Stoppzeiten Eigenschaften (A, 6 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ ein W-Raum mit einer Filtration.

(a) Zeige, dass T genau dann eine Stoppzeit ist, wenn $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Seien T, S zwei Stoppzeiten bezüglich $\mathcal{F}_n$. Zeige, dass $T \vee S := \max(T, S)$ und $T \wedge S := \min(T, S)$ auch Stoppzeiten sind. *Hinweis:* Nutze (a).

(c) Ist $T + S$ eine Stoppzeit? Zeige es, oder gebe ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 49. Eigenschaften der Irrfahrt (B, 4 Punkte)

(a) Seien X_i nicht-triviale i.i.d. Zufallsvariablen mit $EX_i = 0$, $a > 0$ und $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Zeige dass
$$P(-a < S_n < a \,\forall n \geq 0) = 0.$$
Nutze dazu die Stoppzeit $T_a := \inf\{n \geq 0 : |S_n| \geq a\}$, den Stoppsatz 16.13 und Konvergenzsatz 16.15.

(b) Nehme jetzt an, dass $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$, d.h. S_n ist die einfache symmetrische Irrfahrt. Setze $H_a = \inf\{n \geq 0 : S_n = a\}$, $a \in \mathbb{Z}$. Für $a < 0 < b$, zeige, dass
$$P(H_a < H_b) = \frac{b}{b-a}.$$

Aufgabe 50. Asymptotisches Verhalten von Martingalen (B, 5 Punkte)
Sei X_n ein Martingal mit beschränkten Inkrementen, d.h. $|X_n - X_{n-1}| \leq M < \infty$, P-f.s. Setze
$$C = \{\omega : \lim X_n(\omega) \text{ existiert und ist endlich}\},$$
$$D = \{\omega : \limsup X_n(\omega) = -\liminf X_n(\omega) = \infty\}.$$
Zeige, dass $P(C \cup D) = 1$, d.h. ein Martingal entweder konvergiert oder "zwischen $-\infty$ und ∞ oszilliert". *Hinweis:* Betrachte die Stoppzeit $T = \inf\{k : X_k < -K\}$, zeige, dass $X_{n\wedge T}$ konvergiert f.s., und nehme $K \to \infty$.

Aufgabe 51. Bonusfrage zu Aufgabe 50 (C, 3 Punkte)
Finde ein Martingal M_n mit $\lim_{n\to\infty} M_n = -\infty$ P-f.s. *Hinweis:* Versuche $M_n = D_1 + \cdots + D_n$, wobei D_n unabhängig mit $ED_n = 0$ aber nicht identisch verteilt sind.

Aufgabe 52. Galton-Watson Prozess (A, 3 Punkte)
Galton und Watson, nach denen dieser Prozess benannt ist waren an der Überlebens-wahrscheinlichkeit von Familiennamen interessiert. Im 19. Jh. behielten nur männliche Nachkommen den Familiennamen. Nimm an, jede Familie hat genau 3 Nachkommen, deren Geschlecht durch einen Münzwurf bestimmt wird. Berechne die W-keit ρ, dass der Familienname aussterben wird, wenn $Z_0 = 1$. *Hinweis:* Vergiss nicht, dass $\varphi(1) = 1$.