Blatt 9

Abgabe per Email am 24. April 2020 um 13 Uhr

Aufgabe 41. Mehr Eindeutigkeit von bedingten EW (A, 3 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G}$ eine Teil-σ-Algebra, und $X, Y \in L^1$ zwei Zufallsvariablen. Nehme an, dass $X = Y$ P-f.s. auf einem $B \in \mathcal{G}$ (d.h. $P(\{\omega \in B : X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 0$). Zeige, dass dann auch $E(X \mid \mathcal{G}) = E(Y \mid \mathcal{G})$, P-f.s. auf B.

Aufgabe 42. Bayes Regel (B, 3 Punkte)
Seien A und G zwei Ereignisse mit $P(A) > 0$ und $G \in \mathcal{G}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ ist. Definiere

$$P(A \mid \mathcal{G}) := E(\mathbf{1}_A \mid \mathcal{G}).$$

Zeige, dass

$$P(G \mid A) = \frac{\int_G P(A \mid \mathcal{G}) \mathrm{d}P}{\int_\Omega P(A \mid \mathcal{G}) \mathrm{d}P}.$$

Aufgabe 43. "Chebyshev" Ungleichung für bedingte EW (A–B, 3 Punkte)
Sei $X \in L^2$ und $a > 0$. Zeige, dass

$$P(|X| \geq a|\mathcal{G}) \leq a^{-2} E(X^2|\mathcal{G}).$$

Aufgabe 44. Exponentieller Moment der i.i.d. Summe (A, 4 Punkte)
Seien X_i, $i \geq 1$, i.i.d. mit $\psi(\lambda) = E\mathrm{e}^{\lambda X_1} \in (0, \infty)$ und $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(a) Zeige, dass $M_n = \psi(\lambda)^{-n} \mathrm{e}^{\lambda S_n}$ ein Martingal bzg. $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ ist.

(b) Nehme an, dass $EX_1 > 0$. Berechne $\lim_{n\to\infty} M_n$ und $\lim_{n\to\infty} EM_n$.

Aufgabe 45. Bedingte Varianz (A, 3 Punkte)
Für $X \in L^2$ definiere $\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G}) = E(X^2 \mid \mathcal{G}) - E(X \mid \mathcal{G})^2$. Zeige, dass

$$\mathrm{Var}(X) = E(\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G})) + \mathrm{Var}(E(X \mid \mathcal{G})).$$

Aufgabe 46. (B–C, 3 Punkte)
Seien X, Y zwei Zufallsvariablen mit $E(Y \mid \mathcal{G}) = X$ und $E(X^2) = E(Y^2) < \infty$. Zeige, dass $X = Y$ f.s.