Blatt 7

Abgabe per Email am 10. April 2020 um 13 Uhr

Aufgabe 33. Charakteristische Funktionen wichtiger Verteilugen (A, 3 Punkte)
Berechne die charakteristische Funktion der

(a) Bernoulli-Verteilung mit Parameter p.

(b) Binomial-Verteilung mit Parametern n, p. (Kannst du zwei Lösungswege finden?)

(c) Exponentialverteilung mit Parameter λ.

Aufgabe 34. Charakteristische Funktion der Normalverteilung (A–B, 4 Punkte)

(a) Berechne die charakteristische Funktion der Standardnormalverteilung.

(b) Sei $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Berechne die charakteristische Funktion φ_Y. *Hinweis:* Nutze (a) und $(Y - m)/\sigma \sim N(0, 1)$.

Aufgabe 35. Summenstabilität (A–B, 4 Punkte)

(a) (Übung 11.20 im Skript) Seinen X, Y unabhängig Poisson-verteilt mit Parametern λ_X und λ_Y. Zeige mit Hilfe des Beispiels 11.13 im Skript und der Theorie der charakteristischen Funktionen, dass auch $X + Y$ Poisson-verteilt ist mit Parameter $\lambda_X + \lambda_Y$.

(b) Seien $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$ unabhängig. Zeige, dass

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}\Big(\sum_{i=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\Big).$$

(c) (C, Bonusfrage +3 Punkte) Versuche (b) für $n = 2$ direkt mit der Formel $f_{X_1+X_2} = f_{X_1} * f_{X_2}$ (Faltung der Dichten) zu zeigen.

Aufgabe 36. Lévy Metrik (B, 4 Punkte)
Für zwei Verteilungsfunktionen F, G, sei

$$\rho(F, G) = \inf\{\epsilon > 0 : \ F(x - \epsilon) - \epsilon \leq G(x) \leq F(x + \epsilon) + \epsilon \text{ für alle } x\}.$$

(a) Zeige, dass ρ eine Metrik auf dem Raum aller Verteilungsfunktionen ist.

(b) Zeige, dass die Konvergenz in ρ der schwachen Konvergenz entspricht. D.h. $\rho(F_n, F) \to 0$ genau dann, wenn die dazugehörige Masse schwach konvergieren.