# Blatt 5

*Abgabe am 27. März 2020 um 13 Uhr*

Die gelösten Aufgaben sind per Email als PDF abzugeben.

**Aufgabe 22. Extremwerttheorie, Gumbel-Verteilung** (A,(c)C, 7 Punkte)
Seien $X_i$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F$ und $M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$.

(a) Zeige, dass $F_{M_n}(a) := P[M_n \le a] = F(a)^n$.

(b) Nehme an, dass $X_i$ exponentialverteilt sind, d.h. $F(a) = 1 - \mathrm{e}^{-a}$ für $a \ge 0$. Zeige, dass die Verteilung von $M_n - \log n$ gegen Gumbel-Verteilung konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n - \log n \le a) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-a}}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

(c) (Bonusfrage für die, die gerne rechnen :) Nehme jetzt an, dass $X_i$ standardnormalverteilt sind. Zeige die Aussage der Bemerkung 7.8 im Skript:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{2\log n}\left(M_n - \sqrt{2\log n} + \frac{\log\log n + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log n}}\right) \le a\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-a}}.$$

*Hinweis.* Nutze die Tail-Abschätzungen von Claim 7.7 für $P(X_i \ge u)$.

*Bemerkung.* Es ist kein Zufall, dass die Grenzwertverteilungen gleich sind.

**Aufgabe 23. Ky Fan Metrik** (B, 6 Punkte)
Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $X, X_n, Y$ seien Zufallsvariablen. Die **Ky Fan Metrik** ist definiert als

$$d(X,Y) := \min\{\epsilon \ge 0 : P(|X - Y| > \epsilon) \le \epsilon\}.$$

Zeige:

(a) Das Minimum in der Definition wird in der Tat angenommen.

(b) $d(X,Y) = 0$ genau dann, wenn $X = Y$ fast sicher.

(c) $d$ erfüllt die Dreiecksungleichung: $d(X,Z) \le d(X,Y) + d(Y,Z)$.

(d) $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit genau dann, wenn $d(X_n, X) \to 0$.

*Hinweis zu (c).* Beginne mit $P(|X - Z| > d(X,Y) + d(Y,Z)) \le P(|X - Y| > d(X,Y)) + P(\dots) \le \dots$.

**Aufgabe 24. Kleine Veralgemeinerung der Behauptung 3.13** (A–B, 3 Punkte)
Sei $X$ eine nicht-negative Zufallsvariable und $p > 0$. Zeige, dass

$$E(X^p) = \int_0^\infty p y^{p-1} P(X > y)\, \mathrm{d}y,$$

*Hinweis.* Nutze $x^p = \int_0^x p y^{p-1} \mathrm{d}y$.

**Aufgabe 25. Notwendigkeit der Vorausetzungen vom GGZ** (B, 4 Punkte)
Seien $X_i$, $i \ge 1$, i.i.d. Zufallsvariablen und sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Nehme an, dass $\frac{1}{n}S_n$ $P$-f.s. gegen einer Zufallsvariable $Y$ konvergiert. Zeige, dass $Y$ $P$-f.s. konstant ist. *Hinweis:* 0-1 Gesetz.

(b) Zeige, dass wenn $E(|X_i|) = \infty$, dann konvergiert $\frac{1}{n}S_n$ nicht, genauer

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n \text{ existiert und ist endlich}\Big) = 0.$$

*Hinweis.* Zeige mit Hilfe der Aufgabe 24 und dem zweiten Lemma von Borel-Cantelli, dass $P(|X_n| \geq n \text{ unendlich oft}) = 1$.

**Aufgabe 26. Längste "Kopf" Sequenz bei $n$ Münzwürfen** (B–C, 7 Punkte)
Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ i.i.d. mit $P(X_n = 1) = P(X_n = 0) = 1/2$. Sei

$$\ell_n = \max\{m : X_{n-m+1} = \cdots = X_n = 1\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

die Länge der aufeinanderfolgenden Sequenz von "Kopf" (bzw. 1) zum Zeitpunkt $n$, und sei $L_n = \max_{1\leq k\leq n} \ell_k$ die Länge der längsten aufeinanderfolgenden "Kopf" Sequenz bis zur Zeit $n$. Das Ziel dieser Übung ist zu zeigen, dass

$$\frac{L_n}{\log_2 n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s} 1.$$

(a) Zeige, dass die $\ell_n$ identisch verteilt sind. Welche Verteilung haben sie.

(b) Zeige, dass $\limsup L_n/\log_2 n \leq 1$.

*Hinweis:* Es ist fast wie in Beispiel 7.6

(c) (Bonus) Zeige, dass $\liminf L_n/\log_2 n \geq 1$.

*Hinweis:* Achtung, die $\ell_n$ sind nicht unabhängig, also können wir nicht wie im Beispiel 7.6 vorgehen. Setze daher $R = [(1-\varepsilon)\log_2 n] + 1$ und zeige, dass die "Block-Ereignisse"

$$A_i = \{X_{iR} = \cdots = X_{(i+1)R-1}\}, \qquad i \in \mathbb{N},$$

unabhängig sind, mit $P(A_i) \geq n^{-(1-\varepsilon)/2}$. Nutze dann, dass $P(L_n \leq (1-\varepsilon)\log_2) \leq P(\cap_{i=1}^{[n/R]} A_i^c)$ und verwende das Lemma von Borel-Cantelli.