Blatt 3

Abgabe am 13. März 2020 um 13 Uhr

Aufgabe 10. Beweis von Korollar 3.9 (A, 3 Punkte)
Für $1 \leq q \leq p$ und $X \in L^p(P)$, zeige dass $\|X\|_q \leq \|X\|_p$.

Aufgabe 11. Varianz (A, 0 Punkte)
(Diese Aufgabe muss nicht abgegeben werden.) Stellen Sie sicher, dass Sie die Übung 3.14 aus dem Skript lösen können.

Aufgabe 12. Kovarianz(matrix) (A–B, 6 Punkte)

(a) Für zwei Zufallsvariablen $X, Y \in L^2$ sei $\operatorname{Cov}(X,Y) = E\big((X-EX)(Y-EY)\big)$ ihre Kovarianz. Zeige, dass $|\operatorname{Cov}(X,Y)| \leq \sqrt{\operatorname{Var} X \ \operatorname{Var} Y}$.

(b) Zeige, dass die Ungleichung in (a) eine Gleichung genau dann ist, wenn $Y = aX + b$ für ein $a \in \mathbb{R}$?

(c) Sei $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Zufallsvektor, wobei $X_i \in L^2$ für alle $1 \leq i \leq n$. Seine Kovarianzmatrix $\Sigma(X)$ ist definiert durch

$$\Sigma_{ij}(X) = \operatorname{Cov}(X_i, X_j), \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Zeige, dass $\Sigma(X)$ eine positiv definite Matrix ist, d.h. $\sum_{i,j=1}^n \xi_i \Sigma_{ij}(X) \xi_j \geq 0$ für jeden Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$. *Hinweis:* Setze $\bar{X}_i = X_i - EX_i$ und zeige, dass $\sum_{i,j=1}^n \xi_i \Sigma_{ij} \xi_j = E[(\xi \cdot \bar{X})^2]$.

Aufgabe 13. Eine untere Abschätzung (B, 3 Punkte)
Sei $Y \geq 0$ eine Zufallsvariable mit $E(Y^2) < \infty$. Zeige, dass für jedes $\theta \in [0,1]$

$$P(Y > \theta EY) \geq (1-\theta)^2 \frac{(EY)^2}{E(Y^2)}.$$

Hinweis. Schreibe $E(Y) = E(Y \mathbf{1}_{Y \leq \theta EY}) + E(Y \mathbf{1}_{Y > \theta EY})$ und nutze die Cauchy-Schwarz Ungleichung.

Aufgabe 14. Unabhängigkeit (A, 4 Punkte)

(a) Zeige, dass zwei Ereignisse A, B genau dann unabhängig sind (d.h. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$), wenn die σ-Algebren $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ und $\{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$ unabhängig sind.

(b) Zeige, dass A genau dann von sich selber unabhängig ist, wenn $P(A) \in \{0,1\}$.

Aufgabe 15. Bedingte Wahrscheinlichkeit (A, 3 Punkte)
Sei $B \in \mathcal{A}$ ein Ereignis mit $P(B) > 0$. Zeige, dass die Abbildung $\mathcal{A} \ni A \mapsto P(A|B)$ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.