Blatt 2

Abgabe am 6. März 2020 um 13 Uhr

In allen Aufgaben dieses Blattes dürfen die zutreffenden Integrale/Summen mit einem Computeralgebra-System berechnet werden. Vergewissern Sie sich aber trotzdem, dass Sie sie auch selber berechnen können.

Aufgabe 5. Verteilungsfunktionen (A, 5 Punkte)
Betrachte die folgenden drei Verteilungsfunktionen (mit $p \in (0,1)$ und $\lambda > 0$):

$$F_1(x) = \begin{cases} 1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{4}+\frac{x}{2}, & x \in [0,1), \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

und die dazugehörigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_3$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ bezeichnet die Gaußklammer).

(a) Bestimme, für $i = 1,2,3$ und für alle $x \in \mathbb{R}$, die Wahrscheinlichkeit $P(X_i = x)$.

(b) Welche dieser Zufallsvariablen sind diskret/stetig? Wie heissen ihre Verteilungen (wenn es einen Namen gibt)? Für die stetigen Zufallsvariablen bestimme die dazugehörige Dichtefunktion.

(c) Berechne EX_i, $i = 1,2,3$.

Aufgabe 6. Zufallsvariablen I (A, 3 Punkte)
Betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum $((-1,1), \mathcal{B}((-1,1)), P)$, wobei $P(A) = \int_A \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$ für alle $A \in \mathcal{B}((-1,1))$. Finde die Verteilungsfunktionen der folgenden Zufallsvariablen:
(a) $X_1(\omega) = \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(\omega)$, (b) $X_2(\omega) = \ln(1+\omega)$, (c) $X_3(\omega) = \omega^2$.

Aufgabe 7. Zufallsvariablen II (B, 4 Punkte)
Betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $P(A) = \int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, wobei $f(x,y) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_D(x,y)$ und D ist das Dreieck $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0, x+y \leq 2\}$. Berechne die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen (hier $\Omega \ni \omega = (x,y)$):
(a) $X_1(\omega) = x$, (b) $X_2(\omega) = x + y$.

Aufgabe 8. Prinzip von Inklusion und Exklusion (B, 6 Punkte)
Seien $A_1, \ldots, A_n$ beliebige Ereignisse.

(a) Benutze die De Morganschen Gesetze um zu zeigen, dass

$$\mathbf{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-\mathbf{1}_{A_i}).$$

(b) Leite daraus das Prinzip von Inklusion und Exklusion her:

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

Hinweis. Benutze $P(A) = E(\mathbf{1}_A)$ und die Linearität des Erwartungswertes.

(c) Beweise mit Induktion, dass

$$
\begin{aligned}
P\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n\right) &\leq \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - \sum_{i=1}^{n-1} P\left(A_i \cap A_{i+1}\right), \\
P\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n\right) &\geq \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - \sum_{i \neq j} P\left(A_i \cap A_j\right).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9. Verteilungsfunktionen in $\mathbb{R}^n$ (B, 6 Punkte)
Sei $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein n-dimensionaler Zufallsvektor (d.h. eine $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable), und $F_X : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ seine Verteilungsfunktion, definiert durch

$$F_X(x) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Zeige, dass F in allen n Argumenten nicht-fallend und rechtsstetig ist.

(b) Im Fall $n = 2$, zeige dass

$$P(X \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) = F_X(b_1, b_2) - F_X(a_1, b_2) - F_X(b_1, a_2) + F_X(a_1, a_2).$$

(c) Ist jede nicht-fallende rechtsstetige Funktion F von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die auch richtig normiert ist (d.h. $\lim_{x_1,\ldots,x_n \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x_1,\ldots,x_n \to \infty} F(x) = 1$), Verteilungsfunktion eines Zufallsvektors. *Hinweis:* Betrachte $n = 2$ die Formel von (b).