Blatt 1

Abgabe am 24. Februar 2020

Die Übungen dieser Woche sollten hauptsächlich Wiederholung des Stoffes der Vorlesungen *Einführung in die Statistik* und *Reelle Analysis* sein. Die Punkte, die Sie für das korrekte Lösen dieser Aufgaben erhalten, sind Bonuspunkte. Sie werden am Ende des Semesters gutgeschrieben, zählen aber nicht zu der Gesamtpunktzahl.

Die Aufgaben werden in drei Schwierigkeits-Kategorien A–C eingeteilt. Aufgaben der Kateogrie A sind am einfachsten, Aufgaben der Kategorie C am schwierigsten und Aufgaben der Kategorie B irgendwo dazwischen. Die Aufgaben der Kategorie A sollten für alle lösbar sein, die regelmässig die Vorlesung besuchen. Aufgaben der Kategorien A, B sollte man am Ende des Semester lösen können um die Klausur zu bestehen. Die Aufgaben der Kategorie C werden nicht bei der Klausur vorkommen. Sie sind nicht notwendigerweise schwierig, aber vielleicht ein bisschen unüblich.

Aufgabe 1. Elementare Eigenschaften der W-Masse (A–B, 5 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeige, dass

(a) $\Omega \in \mathcal{A}$

(b) Wenn $A, B \in \mathcal{A}$, dann auch $A \cup B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$ und $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

(c) $P(\emptyset) = 0$.

(d) P ist additiv, d.h. für alle $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt gilt $P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

(e) Stetigkeit der W-Masse: Seien $A_i \in \mathcal{A}$ mit $A_i \subset A_{i+1}$, $i \geq 1$. Dann

$$P(\bigcup_{i\geq 1} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

Aufgabe 2. Erzeugte σ-Algebra (B–C, 4 Punkte)
Zeige den folgenden Satz: Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann existiert die kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$, die $\mathcal{E}$ enthält, genannt die *von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.*

Hinweis. Betrachte

$$\Sigma := \big\{\mathcal{A} : \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra auf } \Omega\big\}$$

und zeige, dass Σ nicht leer ist. Definiere $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{A}\in\Sigma} \mathcal{A}$. Zeige, dass $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist, und dass sie die kleinste ist, die $\mathcal{E}$ enthält.

Aufgabe 3. Borel'sche σ-Algebra (A–B, 4 Punkte)
Sei $\mathcal{O}$ die Familie aller offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, und $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O})$ die Borelsche σ-Algebra. Zeige, dass die folgenden Mengensysteme auch $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ abgeschossen}\},\\
\mathcal{E}_2 &= \{(a, b) : a < b \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{E}_3 &= \{(a, b) : a < b \in \mathbb{Q}\},\\
\mathcal{E}_4 &= \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{Q}\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Übung 1.5 aus der Vorlesung (A, 3 Punkte)
Zeige, dass die Abbildung $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ definiert im Beispiel 1.4 im Skript der Vorlesung σ-additiv ist.